

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA HUKUM PENDINGIN NEWTON



Dosen Pengampu:

Amirul Hakam, S.Si, M.Si
1993202011012

Disusun Oleh:

- | | |
|--------------------------------------|--------------|
| 1. Zakiyyah Furoida | (5002221029) |
| 2. Elvina Khoirunisa Alim | (5002221056) |
| 3. Erwin Febrianti | (5002221059) |
| 4. Nabillah Putri Srimaharani | (5002221063) |
| 5. Gita Lestari Pasaribu | (5002221067) |
| 6. Mohammad Febryan Khamim | (5002221072) |
| 7. Jocelyne Sharon Geraldine Sitorus | (5002221087) |
| 8. Marcellius Fernando Robot | (5002221091) |
| 9. Sabrina Fuziyyah Putri | (5002221115) |
| 10. Alvian Dwi Rahmawati | (5002221150) |
| 11. Qayla Syadza Tsurayyaa | (5002221171) |

**PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (C)
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER SURABAYA
2022/2023**

Deskripsi Kasus

Hukum pendingin Newton menyatakan bahwa laju perubahan pada suatu benda sebanding dengan perbedaan suhu antara benda itu sendiri dan suhu media sekelilingnya. Panas dapat berpindah dari suatu sistem ke sistem lain yang keduanya memiliki perbedaan suhu. Oleh karena itu, benda yang lebih panas daripada suhu disekitarnya dapat mengalami penurunan suhu atau pendinginan. Perubahan suhu suatu benda yang mengalami pendinginan dengan perbedaan antara suhu benda dan suhu media disekitarnya dapat dinyatakan dalam model matematika. Misalkan, suhu benda adalah T pada waktu t dan suhu media sekelilingnya adalah T_m maka hukum pendingin newton dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \text{ } k \text{ adalah konstanta faktor kesebandingan.}$$

Penyelesaian persamaan diferensial

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\int \frac{dT(t)}{dt} = \int -k dt$$

$$\ln|T - T_m| = -kt + C$$

$$T - T_m = e^{-kt + C}$$

$$T - T_m = e^C e^{-kt}$$

$$T - T_m = C e^{-kt}$$

$$T(t) = T_m + C e^{-kt}$$

Pada keadaan awal $t = 0$, nilai dari C dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$T(0) = T_m + C e^{-k(0)}$$

$$T_0 = T_m + C$$

$$C = T_0 - T_m$$

Dengan demikian, persamaan dapat dituliskan kembali menjadi seperti di bawah ini.

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

Contoh Kasus Soal dan Penyelesaiannya

1. Ketika kue panggang keluar dari *microwave* oven, suhu yang diukur adalah $350^{\circ}F$. Tiga menit kemudian, suhu yang diukur turun menjadi $250^{\circ}F$. Berapakah waktu yang dibutuhkan untuk mendinginkan kue panggang tersebut hingga mencapai suhu $100^{\circ}F$ jika suhu kamarnya adalah $67^{\circ}F$?

Penyelesaian:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T - 67)$$

$$\int \frac{dT(t)}{T - 67} = - \int k \cdot dt$$

$$\ln |T(t) - 67| = -kt + c$$

$$T(t) - 67 = e^c e^{-kt}$$

$$T(t) - 67 = C e^{-kt}$$

$$T(t) = 67 + C e^{-kt}$$

Selanjutnya, substitusikan $T(0) = 350^{\circ}F$ ke persamaan sebelumnya sehingga diperoleh

$$T(t) = 67 + C e^{-kt}$$

$$T(0) = 67 + C e^{-k(0)}$$

$$350 = 67 + C$$

$$C = 283^{\circ}F$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $C = 283$ ke persamaan sebelumnya, sehingga diperoleh:

$$T(t) = 67 + 283 e^{-kt}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $T(3) = 250^{\circ}F$ ke persamaan di atas sehingga diperoleh

$$T(t) = 67 + 283 e^{-kt}$$

$$T(3) = 67 + 283 e^{-k(3)}$$

$$250 = 67 + 283 e^{-k(3)}$$

$$183 = 283 e^{-k(3)}$$

$$\frac{183}{283} = e^{-3k}$$

$$\ln \frac{183}{283} = -3k$$

$$k = 0,145$$

Lalu, substitusikan nilai k ke persamaan sebelumnya

$$T(t) = 67 + 283 e^{-0,145t}$$

Terakhir, substitusikan nilai $T(t) = 100^{\circ}F$ ke hasil akhir persamaan. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
T(t) &= 67 + 283e^{-0,145t} \\
100 &= 67 + 283e^{-0,145t} \\
33 &= 283e^{-0,145t} \\
\frac{33}{283} &= e^{-0,145t} \\
\ln \frac{33}{283} &= -0,145t \\
t &= 14,783
\end{aligned}$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan untuk mendinginkan kue panggang hingga mencapai suhu **100°F** adalah sekitar **14,783 menit** atau **14 menit 47 detik**.

2. Suatu bola tembaga mempunyai suhu $100^{\circ}C$. Bola tersebut dimasukkan ke dalam cairan yang bersuhu $30^{\circ}C$. Setelah 3 menit, suhu bola menjadi $70^{\circ}C$. Tentukan setelah berapa menit suhu bola menjadi $40^{\circ}C$!

Penyelesaian :

Perubahan suhu bola mengikuti Hukum Pendingin Newton sebagai berikut:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Diketahui:

$$t = 0 \rightarrow T = 100^{\circ}C$$

$$t = 3 \rightarrow T = 70^{\circ}C$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

Ditanya:

$$t = 0 \rightarrow T = 40^{\circ}C$$

Jawab:

Menggunakan integral tak tentu

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

$$\int \frac{dT(t)}{(T - 30)} = \int -k \cdot dt$$

$$\ln(T - 30) = -kt + C$$

$$T - 30 = e^{-kt + C}$$

$$T = 30 + e^{-kt + C}$$

$$T = 30 + e^C e^{-kt}$$

$$\begin{aligned}
 t = 0 &\rightarrow T = 100^{\circ}C \\
 100 &= 30 + e^C e^{-k \cdot 0} \\
 100 - 30 &= e^C \\
 e^C &= 70
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t = 3 &\rightarrow T = 70^{\circ}C \\
 70 &= 30 + e^C e^{-k \cdot 3} \\
 70 - 30 &= 70 \cdot e^{-3k} \\
 \frac{40}{70} &= e^{-3k} \\
 \ln\left(\frac{40}{70}\right) &= -3k \\
 k &= \frac{-\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}
 \end{aligned}$$

$$T = 30 + 70e^{\frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t}$$

$$\begin{aligned}
 t = ? &\rightarrow T = 40^{\circ}C \\
 T &= 30 + 70e^{\frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t} \\
 40 &= 30 + 70e^{\frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t} \\
 \frac{40 - 30}{70} &= e^{\frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t} \\
 \frac{10}{70} &= e^{\frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t} \\
 \ln\left(\frac{10}{70}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{40}{70}\right)}{3}t \\
 t &= \frac{3 \ln\left(\frac{10}{70}\right)}{\ln\left(\frac{40}{70}\right)} \\
 &= 10,43 \qquad 22^{\circ}C
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $t = 10,43$ menit

- Sebuah termometer menunjukkan $5^{\circ}C$, dibawa ke sebuah ruangan bertemperatur $22^{\circ}C$. Satu menit kemudian, termometer tersebut menunjukkan suhu $12^{\circ}C$. Berapa lamakah waktu yang dibutuhkan sampai termometer menunjukkan $22^{\circ}C$ atau mungkin $21,9^{\circ}C$?

Penyelesaian :

Perubahan suhu bola mengikuti Hukum Pendingin Newton sebagai berikut:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Diketahui :

$$t = 0 \rightarrow T = 5^{\circ}C$$

$$t = 3 \rightarrow T = 12^{\circ}C$$

Ditanya :

$$t = ? \rightarrow \text{ketika } T = 22^{\circ}C$$

Jawab :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 22^{\circ}C)$$

$$\int \frac{dT(t)}{T - 22} = - \int k \cdot dt$$

$$\ln |T(t) - 22| = -kt + c$$

$$T - 22 = -e^{kt+c}$$

$$T - 22 = -C \cdot e^{kt}$$

$$T = 22 - C \cdot e^{kt}$$

$$t = 0 \rightarrow T = 5^{\circ}C$$

$$T = 22 - C \cdot e^{kt}$$

$$5 = 22 - C \cdot e^{k \cdot 0}$$

$$5 = 22 - C$$

$$C = 22 - 5 = 17$$

$$T = 22 - 17 e^{kt}$$

$$t = 3 \rightarrow T = 12^{\circ}C$$

$$12 = 22 - 17 \cdot e^{k \cdot 1}$$

$$e^k = \frac{10}{17}$$

$$k = \ln\left(\frac{10}{17}\right)$$

$$T = 22 - 17 \cdot e^{\ln\left(\frac{10}{17}\right)t}$$

$$T = 22 - 17 \cdot e^{-0,5306 t}$$

$$21,9 = 22 - 17 \cdot e^{-0,5306 t}$$

$$e^{-0,5306 t} = \frac{0,1}{17} = 0,00588$$

$$-0,5306 t = \ln 0,00588$$

$$t = \frac{-5,1362}{-0,5306} = 9,68$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan adalah 9,68 menit.

Contoh Simulasi Menggunakan Pemrograman Python

Secangkir kopi dengan suhu 80 derajat Celcius ditinggalkan begitu saja di ruangan yang memiliki suhu 25 derajat Celcius. Jika nilai konstanta proporsionalitasnya adalah 0,65/menit, bagaimanakah perkembangan suhu secangkir kopi tersebut dengan tiap menitnya pada 25 menit pertama? Bagaimana grafik temperatur kopi terhadap waktu?

Penyelesaian:

```
#import library yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensialnya
from scipy.integrate import odeint, ode
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from prettytable import PrettyTable

#np.set_printoptions(suppress = True, precision=10)

#ubah persamaan diferensial ke dalam kode python
def dTdt(T, t):
    pendinginanNewton = -0.65 * (T-25)
    return pendinginanNewton

#buat variabel yang menyatakan kondisi inisial kopi dan variabel waktu
y0 =[80.00]
t=np.linspace(0, 25, 26)

#persamaan diferensial diselesaikan dengan method di bawah ini
T = odeint(dTdt, y0, t)

#kode di bawah ini bertujuan untuk membuat tabel yang berisikan waktu dan temperatur kopi
tabelTempTime = PrettyTable(["waktu (menit)", "Temperatur (Celsius)"])

for i in range(26):
    T = odeint(dTdt, y0, t)
    tabelTempTime.add_row([t[i], T[i]])

print(tabelTempTime)

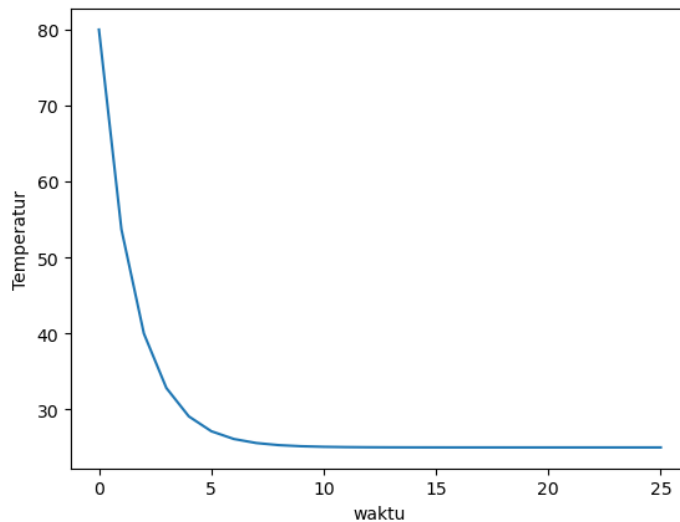
#Kode di bawah ini adalah untuk membuat grafik yang menunjukka hubungan temperatur dan waktu
plt.plot(t, T)
plt.xlabel('waktu')
plt.ylabel('Temperatur')
plt.show()
```

Gambar 1. Syntax python simulasi penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa

Output dari program tersebut adalah sebagai berikut.

waktu (menit)	Temperatur (Celsius)
0.0	[80.]
1.0	[53.7125185628]
2.0	[39.9892490393]
3.0	[32.8250739236]
4.0	[29.0850465154]
5.0	[27.1325813956]
6.0	[26.1133051334]
7.0	[25.5811962914]
8.0	[25.3034110951]
9.0	[25.1583944922]
10.0	[25.0826891813]
11.0	[25.0431675412]
12.0	[25.0225354345]
13.0	[25.0117645021]
14.0	[25.0061416045]
15.0	[25.0032061951]
16.0	[25.0016737965]
17.0	[25.0008738105]
18.0	[25.0004561795]
19.0	[25.0002381404]
20.0	[25.0001243168]
21.0	[25.0000648958]
22.0	[25.000033865]
23.0	[25.0000176686]
24.0	[25.0000092382]
25.0	[25.0000048335]

Gambar 2. Grafik temperatur terhadap waktu selama 25 menit pertama



Gambar 3. Grafik temperatur kopi terhadap waktu

Penjelasan Grafik :

Dari grafik tersebut, dapat diamati bahwasanya suatu kopi akan mengalami penurunan suhu yang bersifat eksponensial. Seiring pertambahan waktu, temperatur dari kopi akan terus menurun dan mendekati suhu ruang, yakni 25°C.